

Correction de l'exercice 4.3 sur le nombre de partitions

Rappelons l'énoncé : On note $S(n, k)$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. Pour $n \geq 1$, si E est un ensemble à n éléments, alors il n'y a aucune façon de partitionner E en 0 parties, il n'y a qu'une seule façon de partitionner E en n parties (chaque élément de E est seul dans son sous-ensemble de la partition) et il n'y a aussi qu'une seule façon de partitionner E en 1 partie (mettre tous les éléments dans le même sous-ensemble). Autrement dit :

$$\forall n \geq 1, \quad S(n, 0) = 0 \text{ et } S(n, 1) = S(n, n) = 1.$$

De plus, pour $k > n$, il n'y a aucune façon de partitionner E en k parties puisque dans une partition, aucune partie ne peut être vide :

$$\forall k > n \geq 1, \quad S(n, k) = 0.$$

Par ailleurs, pour $n \geq 2$, pour partitionner un ensemble à n éléments en k parties, on peut mettre un élément arbitraire à part, répartir les $n - 1$ autres puis placer le dernier élément. Si les $n - 1$ premiers éléments ont été répartis dans $k - 1$ sous-ensembles, alors le dernier doit nécessairement être placé seul. Si les $n - 1$ premiers ont été répartis dans k sous-ensembles, on a k choix pour placer le dernier élément. Autrement dit, on a la relation :

$$\forall n \geq 2, \forall 1 \leq k \leq n, \quad S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k).$$

On souhaite donner une formule explicite pour $S(n, k)$.

1) Pour $k \geq 1$ et $1 \leq g \leq k$, on a

$$\binom{k}{g} = \frac{k!}{g!(k-g)!} = \frac{k}{g} \frac{(k-1)!}{(g-1)!(k-g)!} = \frac{k}{g} \binom{k-1}{g-1}.$$

2) Soient $k \geq 1$ et $1 \leq g \leq k$. Pour démontrer l'égalité

$$\binom{k}{g} - \binom{k-1}{g} = \binom{k-1}{g-1},$$

on peut soit écrire explicitement les coefficients binomiaux comme à la question précédente (fait en TD), soit remarquer que la relation équivalente

$$\binom{k}{g} = \binom{k-1}{g} + \binom{k-1}{g-1}$$

est vraie en faisant un peu de dénombrement :

Pour choisir g éléments parmi k on peut

- soit choisir g objets parmi les $k - 1$ premiers (et ne pas choisir le dernier),
- soit choisir $g - 1$ objets parmi les $k - 1$ premiers et ajouter le dernier.

3) On souhaite maintenant montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq k \leq n$,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{g=1}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} g^n.$$

L'idée est de se servir de la relation de récurrence $S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$. Formellement, on va démontrer par récurrence sur n que, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a l'égalité

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{g=1}^k (-1)^{k-g} \binom{g}{k} g^n.$$

Ça, c'est ce qu'on aurait aimé qu'il se passe. Malheureusement, si on prend k plus petit que n comme on l'a fait jusqu'à maintenant, la démonstration par récurrence ne permet pas de montrer que la formule est vérifiée pour $S(n, n)$, ce qui est un vrai problème puisqu'on suppose cela vérifié dans les hypothèses de la récurrence... C'est d'autant plus rageant qu'on sait que $S(n, n) = 1$, aussi on pourrait s'attendre à pouvoir traiter facilement ce cas à part. En fait, c'est plutôt difficile à faire en faisant juste des manipulations de somme. Voilà ce que je propose : je vais d'abord répondre à l'exercice en admettant provisoirement le résultat pour $k = n$, comme on a fait en TD, et je vais faire ce cas à part après pour les personnes que ça intéresse. C'est un exercice instructif, mais hors programme pour le cours de Science des données (mais je vous encourage quand même à y jeter un oeil!).

Puis, dans un deuxième temps, je vais rédiger une récurrence en démontrant que la formule est vraie **peu importe la valeur de k** , qui pourra donc être plus grand que n . Cette méthode est en fait beaucoup plus facile !

Méthode 1 (difficile) :

On admet donc le lemme suivant :

Lemme (admis provisoirement) : Pour tout entier n , on a

$$1 = S(n, n) = \frac{1}{n!} \sum_{g=1}^n (-1)^{n-g} \binom{n}{g} g^n.$$

Revenons à notre démonstration par récurrence.

Initialisation ($n = 1$) : Comme la relation de récurrence qu'on souhaite utiliser doit être vraie pour tous les k entre 0 et n , on doit vérifier que la formule est correcte pour $S(1, 0)$ et $S(1, 1)$. En fait, on peut directement le faire pour tout n :

$S(n, 0) = 0$ car la somme est alors vide.

$S(n, 1) = 1$ car

$$\frac{1}{1!} \sum_{g=1}^1 (-1)^{1-g} \binom{1}{g} g^n = 1.$$

En particulier, la formule est donc vérifiée pour $S(1, 0)$ et $S(1, 1)$.

Hérédité : Soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{g=1}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} g^n.$$

On repart alors de notre relation de récurrence et on utilise les deux questions précédentes. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
S(n+1, k) &= S(n, k-1) + kS(n, k) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{g=1}^{k-1} (-1)^{k-1-g} \binom{k-1}{g} g^n + \frac{k}{k!} \sum_{g=1}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} g^n \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{g=1}^{k-1} \left[g^n (-1)^{k-g} \left(\underbrace{\binom{k}{g} - \binom{k-1}{g}}_{=\binom{k-1}{g-1} \text{ (question 2)}} \right) \right] + k^n \right) \\
&= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{g=1}^{k-1} \left[g^n (-1)^{k-g} \underbrace{\binom{k-1}{g-1}}_{=\frac{g}{k} \binom{k}{g} \text{ (question 1)}} \right] + k^n \right) \\
&= \frac{1}{k!} \left(\sum_{g=1}^{k-1} \left[g^{n+1} (-1)^{k-g} \binom{k}{g} \right] + k^n \right) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{g=1}^k g^{n+1} (-1)^{k-g} \binom{k}{g}
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait !

Conclusion : Le résultat est démontré par récurrence.

Preuve du lemme : Soit $n \geq 2$. On a $S(n, n) = S(n-1, n-1)$. Ainsi, pour montrer que $S(n, n) = \frac{1}{n!} \sum_{g=1}^n (-1)^{n-g} \binom{n}{g} g^n$, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n!} \sum_{g=1}^n (-1)^{n-g} \binom{n}{g} g^n - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{g=1}^{n-1} (-1)^{n-1-g} \binom{n-1}{g} g^{n-1} = 0,$$

et on pourra alors conclure par récurrence. En avant !

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n!} \sum_{g=1}^n (-1)^{n-g} \binom{n}{g} g^n - \frac{1}{(n-1)!} \sum_{g=1}^{n-1} (-1)^{n-1-g} \binom{n-1}{g} g^{n-1} \\
&= \sum_{g=1}^{n-1} \left[(-1)^{n-g} \frac{g^{n-1}}{(n-1)!} \left(\underbrace{\frac{g}{n} \binom{n}{g}}_{=\binom{n-1}{g-1}} + \binom{n-1}{g} \right) \right] + \frac{n^n}{n!} \\
&= \sum_{g=1}^{n-1} \left[(-1)^{n-g} \frac{g^{n-1}}{(n-1)!} \left(\underbrace{\binom{n-1}{g-1} + \binom{n-1}{g}}_{=\binom{n}{g}} \right) \right] + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{g=1}^n (-1)^{n-g} g^{n-1} \binom{n}{g} \\
&= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{g=1}^n (-1)^g g^{n-1} \binom{n}{g}
\end{aligned}$$

Il "suffit" donc de montrer que $\sum_{g=1}^n (-1)^g g^{n-1} \binom{n}{g} = 0$ pour conclure. Une façon de faire est de voir cette quantité comme la valeur que prend un polynôme en un certain point, et de montrer que la valeur de ce polynôme en ce point vaut effectivement 0. Pour ce faire, on introduit le polynôme P défini par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (1-x)^n$. On peut donner une autre expression de P grâce à la formule du binôme de Newton. Pour rappel, celle-ci dit que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout entier n ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(Si vous ne connaissez pas cette formule, vous pouvez essayer de la démontrer, par exemple par récurrence, c'est un bon exercice !)

Ici, on a donc, pour tout réel x ,

$$P(x) = \sum_{g=0}^n \binom{n}{g} 1^{n-g} (-x)^g = \sum_{g=0}^n \binom{n}{g} (-1)^g x^g.$$

Ça ressemble à ce qu'on cherche, mais ce n'est pas encore tout à fait ça. Une astuce classique dans ce genre de situation est de réaliser qu'on a une dérivée ou une primitive de ce qu'on cherche et de travailler à partir de là. Ici c'est un peu plus subtil (ce n'est vraiment pas un exercice facile !) mais l'idée est similaire. Attachez vos ceintures.

Rappelons qu'on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On introduit une application $\mathcal{D} : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\mathcal{D}(Q(X)) = XQ'(X).$$

Par exemple, $\mathcal{D}(3X^2 + 4X + 5) = X(6X + 4) = 6X^2 + 4X$. En général, on appelle *opérateur* une telle application dont les variables sont des fonctions. Un exemple que vous connaissez déjà est la dérivation que l'on peut voir comme un opérateur : $\frac{d}{dx} : f \mapsto f'$.

Ici, en reprenant notre polynôme P , on a pour tout réel x

$$\mathcal{D}(P(x)) = \sum_{g=0}^n \binom{n}{g} (-1)^g g x^g,$$

et en appliquant $\mathcal{D}$ plusieurs fois, on a pour tout réel x

$$\mathcal{D}^{n-1}(P(x)) = \sum_{g=0}^n \binom{n}{g} (-1)^g g^{n-1} x^g = \sum_{g=1}^n \binom{n}{g} (-1)^g g^{n-1} x^g \quad (\text{le terme pour } g=0 \text{ est nul})$$

Si on évalue en $x = 1$, on retrouve exactement notre somme !

$$\mathcal{D}^{n-1}P(1) = \sum_{g=1}^n (-1)^g g^{n-1} \binom{n}{g}.$$

Par ailleurs, comme 1 est une racine d'ordre n de P , 1 est encore une racine de $\mathcal{D}^k(P)$ pour tout entier $k < n$ (cela se démontre facilement par récurrence en utilisant la formule de la dérivée d'un produit, je le laisse en exercice).

Finalement, on a bien

$$\sum_{g=1}^n (-1)^g g^{n-1} \binom{n}{g} = \mathcal{D}^{n-1}P(1) = 0.$$

La preuve est enfin complète !

Méthode 2 (plus facile) : La relation de récurrence suivante est en fait valable pour tout entier k , potentiellement plus grand que n :

$$\forall n \geq 2, \forall k \geq 1, S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k).$$

C'est la même justification que tout à l'heure, en justifiant les cas où $k > n$ par la remarque qu'alors, par définition $S(n, k) = 0$.

On peut alors procéder par récurrence sur n , en montrant la proposition suivante pour n fixé :

$$\forall k \geq 0, S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{g=1}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} g^n.$$

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, notons $\sigma(n, k) := \frac{1}{k!} \sum_{g=0}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} g^n$. Remarquons que faire commencer la somme à 0 ne change rien, sauf si $n = 0$. La seule chose qui change par rapport à la méthode précédente, c'est l'initialisation où on doit montrer que $S(n, k) = \sigma(n, k)$ pour tout entier k . Ici, il est plus facile d'initialiser pour $n = 0$, en définissant les $S(0, k)$ de la façon suivante : pour tout entier $k > 0$, on a $S(0, k) = 0$, et $S(0, 0) = 1$ (il y a une seule façon de partitionner en 0 parties l'ensemble vide, on aurait pu faire un autre choix ici).

Initialisation ($n = 0$) : On a

$$S(0, 0) = 1 = \frac{1}{0!} \sum_{g=0}^0 (-1)^{0-g} \binom{0}{g} g^0 = \sigma(0, 0).$$

Maintenant, pour $k > 0$, on utilise la formule du binôme de Newton en remarquant que la somme vaut $(1 - 1)^k$:

$$\sigma(0, k) = \frac{1}{k!} \sum_{g=0}^k (-1)^{k-g} \binom{k}{g} = \frac{(1 - 1)^k}{k!} = 0 = S(0, k).$$

Hérédité : On refait exactement la même démonstration que dans la méthode 1, sauf que cette fois elle est valable pour tout entier k , ce qui résout le problème !

Conclusion : Encore une fois, le résultat est démontré par récurrence.

Méthode bonus : Signalons enfin qu'il est possible de faire l'exercice d'une façon très différente en le voyant comme un exercice de pur dénombrement, en "remarquant" que $k!S(n, k)$ correspond au nombre de surjections d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à k éléments. Pour en savoir plus sur ce point de vue, on pourra aller lire les exercices 4.7 et 4.8 de cette page : https://fr.wikiversity.org/wiki/Combinatoire/Exercices/Combinaisons#Exercice_4-7